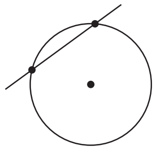
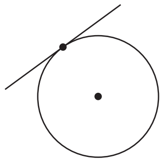
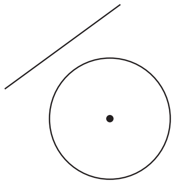
PART3 円と直線の位置関係

要点 ① 円と直線の位置関係（2 次方程式の判別式の利用）

円と直線の共有点の個数は，円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式 D の符号によって求めることができる。よって，円と直線の位置関係は次のように分類できる。

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

例 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求める。

連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ y=x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$ において，②を①に代入すると

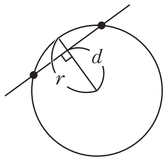
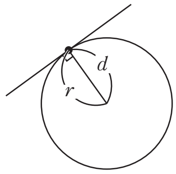
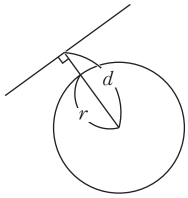
$x^2+(x+k)^2=1$　　すなわち　　$2x^2+2kx+k^2-1=0$

この方程式の判別式を D とすると，円と直線が異なる 2 点で交わるのは，D 　　のときであるから

$$\frac{D}{4}=k^2-2\cdot(k^2-1)>0 \qquad k^2-2<0 \qquad \text{よって} \quad -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

要点 ② 円と直線の位置関係（点と直線の距離の利用）

円と直線の位置関係について，円の中心と直線との距離を d，円の半径を r とすると，d と r の大小により以下のように分類できる。

d と r の大小			
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

例　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x-1$ の位置関係を求める。

円 $x^2+y^2=4$ の中心は原点　　　，半径は $r=$

点 $(0,\ 0)$ と直線　　　　　　　の距離 d は

$$d=\frac{|\qquad\qquad|}{\sqrt{\quad+\quad}}=\frac{|-1|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\frac{1}{\sqrt{10}}$　　2 より，$d<r$　よって円と直線は

例　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求める。

円 $x^2+y^2=1$ の中心は原点　　　，半径は $r=$

点 $(0,\ 0)$ と直線　　　　　　　の距離 d は

$$d=\frac{|\qquad\qquad|}{\sqrt{\quad+\quad}}=\frac{|-k|}{\sqrt{2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは，　　　　のときであるから

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1$　　　$|k|<\sqrt{2}$　　　よって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

3 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+k$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(2) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から，1つの文字を消去して得られる2次方程式の判別式を D とすると

① $D>0 \iff$ 異なる2点で交わる

② $D=0 \iff$ 接する

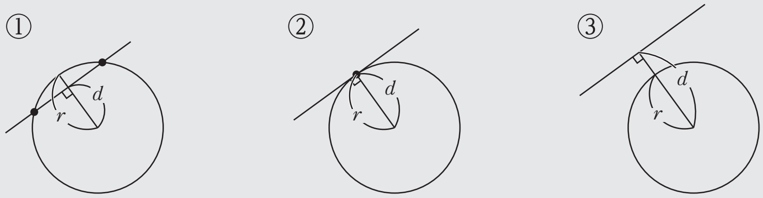
③ $D<0 \iff$ 共有点をもたない

円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

① $d<r \iff$ 異なる2点で交わる

② $d=r \iff$ 接する

③ $d>r \iff$ 共有点をもたない



第 6 講　PART3 確認問題

1　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-2x+k$ が接するとき，定数 k の値は

$k=$ [ア], [イウ]

である。

2　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=x+k$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲は

$k<$ [エオ], [カ] $<k$

である。

PART3 円と直線の位置関係

3 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+k$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(2) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

[解答]

[判別式を用いる方法]

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ① \\ y=3x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入して $x^2+(3x+k)^2=10$

整理すると $10x^2+6kx+k^2-10=0$

この方程式の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=(3k)^2-10\cdot(k^2-10)=-k^2+100$

(1) 円①と直線②が接するのは $D=0$ のときであるから

$$-k^2+100=0 \qquad k^2=100 \qquad \text{よって } k=\pm 10$$

(2) 円①と直線②が共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから

$$-k^2+100<0 \qquad k^2>100 \qquad \text{よって } k<-10,\ 10<k$$

[点と直線の距離を用いる方法]

円 $x^2+y^2=10$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，半径は $r=\sqrt{10}$

点 $(0,\ 0)$ と直線 $3x-y+k=0$ の距離は $d=\dfrac{|3\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{10}}$

(1) 円①と直線②が接するのは $d=r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \qquad |k|=10 \qquad \text{よって } k=\pm 10$$

(2) 円①と直線②が共有点をもたないのは $d>r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10} \qquad |k|>10 \qquad \text{よって } k<-10,\ 10<k$$

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イウ：−5

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=-2x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(-2x+k)^2=5$$

$$5x^2-4kx+k^2-5=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\cdot\left(k^2-5\right)=-k^2+25$$

円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから [A]

$$-k^2+25=0$$

$$k^2=25$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 5}$

[A]　円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると
$D=0 \iff$ 円と直線が接する

(別解)

円 $x^2+y^2=5$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，半径は $r=\sqrt{5}$

点 $(0,\ 0)$ と直線 $2x+y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$ [B]

$$=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

[B]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから [C]

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$|k|=5$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 5}$

[C]　円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると
$d=r \iff$ 円と直線が接する

2 [正解] エオ：-2，カ：2

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(x+k)^2=2$$

$$2x^2+2kx+k^2-2=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2\cdot\left(k^2-2\right)=-k^2+4$$

円と直線が共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから [D]

$$-k^2+4<0$$

$$k^2-4>0$$

$$(k+2)(k-2)>0$$

よって　$\boldsymbol{k<-2,\ 2<k}$

（別解）

円 $x^2+y^2=2$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，半径は $r=\sqrt{2}$

点 $(0,\ 0)$ と直線 $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1\cdot0-1\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$ [E]

$$=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が共有点をもたないのは $d>r$ のときであるから [F]

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

$$|k|>2$$

よって　$\boldsymbol{k<-2,\ 2<k}$

[D]　円の方程式と直線の方程式から，1つの文字を消去して得られる2次方程式の判別式を D とすると

$D<0 \iff$ 円と直線が共有点をもたない

[E]　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[F]　円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

$d>r \iff$ 円と直線が共有点をもたない